

MATEMATICĂ

DE TRECERE



MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND
CERINȚELOR DE BACALAUREAT 2016

**FOLOSIREA FIȘUIICILOR
ESTE O FRAUDĂ.
NU RECOMANDĂM
UTILIZAREA LOR ÎN TIMPUL
EXAMENELOR!**

Cuprins

1. Operații cu numere reale	1–8
1.1. Radicali, puteri	1–2
1.1.1. Puteri	1
1.1.2. Radicali.....	1–2
1.2. Identități	3–4
1.3. Inegalități.....	4–8
2. Funcții.....	8–12
2.1. Noțiunea de funcții	8–9
2.2. Funcții injective, surjective, bijective	9
2.3. Compunerea funcțiilor.....	10–11
2.4. Funcția inversă	11–12
3. Ecuații și inecuații de gradul întâi.....	12–16
3.1. Ecuații de gradul întâi.....	12–13
3.2. Inecuații de gradul întâi.....	13–14
3.3. Modul unui număr real	14–16
4. Numere complexe	16–24
4.1. Forma algebrică.....	17
4.2. Puterile numărului i	18
4.3. Conjugatul lui z	18–19
4.4. Modulul unui număr complex	19–20
4.5. Forma trigonometrică	21
4.6. Formula lui Moivre.....	21–23
4.7. Forma exponențială	23
4.8. Ecuația binomă.....	24
5. Progresii	24–27
5.1. Progresiile aritmetice.....	24–25
5.2. Progresiile geometrice	26–27
6. Logaritmi.....	27–31
6.1. Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale.....	30
6.2. Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale	30–31
7. Geometrie	31–70
7.1. Vectori.....	31–34
7.2. Adunarea vectorilor.....	34–41

7.3. Teoreme cu vectori	41–46
7.4. Geometrie analitică în plan și în spațiu.....	46–53
7.4.1. Plan determinat de un punct și doi vectori necolinari paraleli cu planul	47–49
7.4.2. Plan determinat de trei puncte necolinare.....	49–50
7.4.3. Ecuația planului prin tăieturi	50
7.4.4. Ecuația generală a planului.....	51–53
7.4.5. Poziția planelor.....	52–53
7.5. Ecuația dreptei.....	54–59
7.5.1. Ecuația dreptei determinat de un punct și de un vector paralel cu dreapta.....	54–55
7.5.2. Ecuația dreptei determinat de două puncte diferite.....	55
7.5.3. Ecuația generală a dreptei.....	56
7.5.4. Ecuația dreptei în plan	57–58
7.5.5. Ecuația dreptei determinat de două puncte diferite.....	58
7.5.6. Unghiul determinat de două drepte.....	58–59
7.6. Distanța la un punct la o dreaptă (în plan)	60–61
7.6.1. Ecuația bisectoarei (în plan)	60–61
7.7. Distanța la un punct la o dreaptă (în spațiu)	61–62
7.8. Cercul	62–63
7.9. Elipsa.....	63–65
7.10. Hiperbola.....	65–67
7.11. Parabola.....	67–68
7.12. Alte aplicații cu vectori.....	69–70
8. Metoda inducției matematice.....	70–71
8.1. Axioma de recurență a lui Peano	70
8.2. Metoda inducției matematice	70–71
8.3. Varianta a metodei inducției matematice.....	71
9. Analiză combinatorie	71–76
9.1. Permutări	71–72
9.2. Aranjamente	72
9.3. Combinări.....	73
9.4. Binomul lui Newton	74–75
9.5. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale	76
10. Polinoame	77

10.1. Forma algebrică a unui polinom.....	77
10.2. Divizibilitatea polinoamelor.....	78
10.3. Rădăcinile polinoamelor.....	79
10.4. Ecuații algebrice.....	79–80
10.5. Polinoame cu coeficienți din \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z}	80–81
11. Permutări, matrici, determinanți.....	81–91
11.1. Permutări.....	81–83
11.2. Matrici.....	83–85
11.3. Determinanți.....	86–87
11.4. Inversa unei matrici.....	87–91
11.4.1. $\text{Tr}(A)$	87–88
11.4.2. Determinantul și rangul.....	88–91
12. Sisteme liniare.....	91–93
12.1. Notății.....	91–92
12.2. Compatibilitatea.....	92–93
12.3. Sisteme omogene ($b_i=0$).....	93
13. Trigonometrie.....	93–102
13.1. Aplicații ale trigonometriei în geometrie.....	98–102
14. Analiză matematică.....	102–128
14.1. Recurențe.....	102–103
14.1.1. Recurențe de ordin 1.....	102
14.1.2. Recurențe de ordin al doilea.....	103
14.2. Limita de șiruri.....	103–111
14.2.1. Limite generale, criterii de convergență.....	105–111
14.3. Limite de funcții.....	111–115
14.3.1. Operații cu limite de funcții.....	112
14.3.2. Limite tip.....	113–115
14.4. Continuitatea funcțiilor.....	116–120
14.4.1. Teoreme pentru continuitatea funcțiilor.....	117–120
14.5. Funcții derivabile.....	120–128
14.5.1. Definiția derivatei într-un punct.....	120–121
14.5.2. Reguli de derivare.....	121–122
14.5.3. Derivatele funcțiilor elementare.....	122–124
14.5.4. Derivatele funcțiilor compuse.....	124–125
14.5.5. Derivatele de ordin superior ale unor funcții elementare.....	126–127

14.5.6. Proprietăți ale funcțiilor derivabile.....	127–128
14.6. Integrale.....	128
14.6.1. Primitive.....	128
15. Primitivele funcțiilor	129–166
15.1. Reguli pentru integrarea generală a funcțiilor.....	129
15.2. Primitivele funcțiilor raționale.....	130–135
15.3. Integrale cu $r=(x^2+a^2)^{1/2}$	135–139
15.4. Integrale cu $s=(x^2-a^2)^{1/2}$	139–141
15.5. Integrale cu $t=(a^2-x^2)^{1/2}$	142–143
15.6. Integrale cu $R^{1/2}=(ax^2+bx+c)^{1/2}$	143–145
15.7. Integrale de funcții trigonometrice ce conțin numai sin ..	145–147
15.8. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin numai cos..	148–150
15.9. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin numai tan ..	150–151
15.10. Integrale cu funcții trigonometrice ce conțin atât sin cât și cos.....	152–153
15.11. Funcții logaritmice.....	153–163
15.11.1. Proprietăți ale integralei definite.....	155–158
15.11.2. Teorema Fundamentală	158–159
15.11.3. Inegalități.....	159–163
15.12. Alte teoreme	163–166
15.12.1. Funcții primitivabile	164
15.12.2. Funcții integrabile.....	164–165
15.12.3. Aree	165–166
16. Structuri algebrice.....	166–174
16.1. Grupul.....	166–170
16.1.1. Proprietăți și teoreme.....	167–170
16.2. Monoid	170–171
16.3. Inel.....	171–172
16.4. Corpuri	172–174
17. Spații vectoriale	174–176

1 Operații cu numere reale

1.1 Radicali, Puteri

1.1.1 Puteri

1. $a^{m \cdot n} = a^m \cdot a^n$
2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$
4. $a^m : b^m = (a : b)^m$
5. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Puterile numerelor reale se extind atât pentru exponenți raționali pozitivi sau negativi, cât și pentru puterile reale fiind definite cu ajutorul șirurilor de puteri raționale. Aceste puteri au proprietăți identice cu exponenți numere naturale.

1.1.2 Radicali

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $a > 0$;
2. $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$;
3. $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
5. $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^n = \frac{1}{a}$;
6. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$;
7. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$;
8. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$;
9. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n-m}}$;
10. $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m$;
11. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$;
12. $m\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^P}$;
13. $\sqrt[m]{a^P} \cdot \sqrt[n]{b^Q} = \sqrt[nm]{a^P n \cdot b^Q m}$;
14. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$;
15. $\sqrt{a^2} = |a|$;
16. $2n+1\sqrt{-a} = -2n+1\sqrt{a}$;
17. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$,
 $c^2 = a^2 - b$;

9.3 Combinări

Definiție 9.4. Se numesc *combinări a n elemente luate câte m ($m \leq n$) ale unei mulțimi A cu n elemente toate submulțimile cu câte m elemente, care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A .*

Se notează C_n^m .

Proprietăți:

1. $C_n^1 = n; C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1;$
2. $C_n^m = C_n^{n-m};$
3. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1};$
4. Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este $2^n;$
- 5.

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \dots$$

$$+ C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1};$$

6. $\frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \dots \cdot p_m!} = C_n^{p_1} \cdot C_{n-p_1}^{p_2} \cdot \dots \cdot C_{n-(p_1+p_2+\dots+p_{m-1})}^{p_m},$ unde $p_1 + \dots + p_m < n.$

9.4 Binomul lui Newton

Avem: $(x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^n a^n$.

$(x - a)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} a + \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + (-1)^n C_n^n a^n$.

Teoremă 9.1. *Proprietăți:*

1. termenul de rang $k + 1$ este

$$T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k$$

2. $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$;

3. $C_{n+1}^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$;

4. $T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \frac{a}{x} T_{k+1}$ vagy

$$T_{k+2} = -\frac{n-k}{k+1} \frac{a}{x} T_{k+1};$$

5. Numărul termenilor dezvoltării $(x \pm a)^n$ este $n + 1$;

6. Coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sunt egali.

Relații importante:

1. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$; $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$;
2. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$;
3. $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$;
4. $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$.

Dezvoltări uzuale:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$;
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
5. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$;
6. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

9.5 Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale

Dacă $S_p = 1^p + 2^p + \dots + n^p$, $p \in \mathbb{N}$, atunci avem:

1. $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$;

2. $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3. $S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

4. $S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$;

5. $S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$.

6. Pentru a determina S_p cu ajutorul $S_{p-1}, S_{p-2}, \dots, S_1$ se poate cu formula lui Pascal:

$$(n+1)^{p+1} =$$

$$1 + C_{p+1}^1 S_p + \dots + C_{p+1}^p S_1 + n.$$

15 Primitivele funcțiilor

15.1 Reguli pentru integrarea generală a funcțiilor

Pentru a real nenul:

$$1. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$2. \int [f(x) + g(x)] dx =$$

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$3. \int f(x)g(x) dx =$$

$$f(x) \int g(x) dx -$$

$$\int \left(\int g(x) dx \right) d(f(x))$$

15.2 Primitivile funcțiilor raționale

$$1. \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)}$$

(pentru $n \neq -1$)

$$2. \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b|$$

$$3. \int x(ax + b)^n dx =$$

$$\frac{a(n+1)x - b}{a^2(n+1)(n+2)} (ax + b)^{n+1}$$

(pentru $n \notin \{1, 2\}$)

$$4. \int \frac{x dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b|$$

$$5. \int \frac{x dx}{(ax + b)^2} =$$

$$\frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2} \ln |ax + b|$$

$$6. \int \frac{x dx}{(ax + b)^n} =$$

$$\frac{a(1 - n)x - b}{a^2(n - 1)(n - 2)(ax + b)^{n-1}}$$

(pentru $n \notin \{1, 2\}$)

$$7. \int \frac{x^2 dx}{ax + b} =$$

$$\frac{1}{a^3} \left(\frac{(ax + b)^2}{2} \right.$$

$$\left. - 2b(ax + b) + b^2 \ln |ax + b| \right)$$

$$8. \int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^2} =$$

$$\frac{1}{a^3} \left(ax + b - 2b \ln |ax + b| - \frac{b^2}{ax + b} \right)$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^3} =$$

$$\frac{1}{a^3} (\ln |ax + b|) +$$

$$\frac{1}{a^3} \left(\frac{2b}{ax + b} - \frac{b^2}{2(ax + b)^2} \right)$$

$$10. \int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^n} =$$

$$\frac{1}{a^3} \left(-\frac{(ax + b)^{3-n}}{(n-3)} + \right.$$

$$\left. \frac{2b(ax + b)^{2-n}}{(n-2)} - \frac{b^2(ax + b)^{1-n}}{(n-1)} \right)$$

(pentru $n \notin \{1, 2, 3\}$)

$$11. \int \frac{dx}{x(ax + b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax + b}{x} \right|$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -a \left(\frac{1}{b^2(ax+b)} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| \right)$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x}$$

$$\begin{aligned}
 & (\text{pentru } |x| < |a|) - \frac{1}{a} \operatorname{arccoth} \frac{x}{a} \\
 & = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad (\text{pentru } |x| > |a|)
 \end{aligned}$$

$$16. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$$

$$(\text{pentru } 4ac - b^2 > 0)$$

$$\frac{2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \operatorname{artanh} \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

$$(\text{pentru } 4ac - b^2 < 0)$$

$$-\frac{2}{2ax + b} \quad (\text{pentru } 4ac - b^2 = 0)$$

$$17. \int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c} =$$

$$\frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c|$$